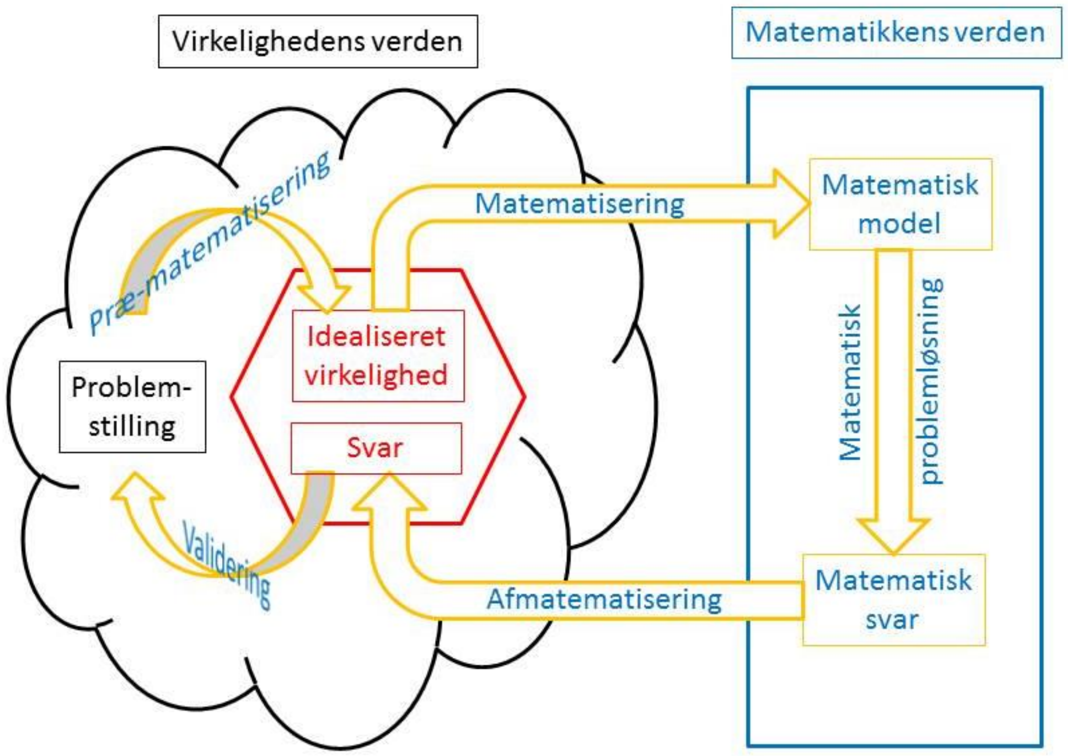
Om matematisk modellering

Hver gang vi bruger matematik til at beskrive noget, der ikke selv er matematik, er der tale om en matematisk modellering, hvor vi kobler problemstillinger fra virkeligheden og matematisk problembehandling. Vi opstiller altså en matematisk model for et virkelighedsudsnit med henblik på at kunne løse nogle problemstillinger fra den virkelige verden, og hvor man ser bort fra forhold, der ikke har væsentlig betydning for løsningen. En matematisk model kan således opfattes som et forenklet spejlbillede af virkeligheden, hvor dette billede er bygget op af matematiske begreber og hjælpemidler. Således er modellering et eksempel på matematikkens store anvendelighed i det virkelige liv.

Matematisk modellering kan fremstilles som en proces, hvori forskellige faser indgår. Den rækkefølge, faserne optræder i, er ikke nødvendigvis givet præcis som beskrevet nedenfor, da faserne ofte gennemløbes i gensidig vekselvirkning med hinanden. Det skyldes, at matematisk modellering faktisk er svært, da der er indbygget et paradoks i matematisk modellering (mere om det senere), men strukturen illustreres af nedenstående figur[1].



På næste side skal vi udfolde begreberne en smule.

[1] Frit efter Niss, M.

1. fase: Præ-matematisering

Udgangspunktet for enhver modellering er formuleringen af det problem, man gerne vil løse ved brug af matematik, og denne formulering fremkommer på baggrund af den del af virkeligheden, som man har en interesse i at beskrive, forstå, forklare eller beherske. Den del af virkeligheden, man ønsker at modellere, lader sig imidlertid ofte ikke umiddelbart beskrive matematisk. Før en modellering af virkeligheden kan finde sted, er det således nødvendigt at opstille et system, der er afgrænset og struktureret til lejligheden. Man må bortskære og idealisere forhold, som har indflydelse på problemet. Formålet er at få et system, der principielt er matematisk modellerbart, og hvor meget, man bortskærer og idealiserer, afhænger af modellørens matematiske kunnen, samt hvor overskuelig modellen skal være. Nogle forhold er af underordnet betydning og kan med rimelighed udelades, andre bør medtages, og andre igen må bortskæres alene med den begrundelse, at vi ikke har kendskab til de årsagssammenhænge, der måtte indgå. Desuden vil umiddelbare opfattelser og forhåndsviden om virkelighedsudsnittet også spille ind på modellens udformning. Systemet fremstilles oftest i ren sproglig form eller ved hjælp af diagrammer – for eksempel et frit legeme diagram, som vi kender fra fysik.

2. fase: Matematisering

I denne fase fremsætter vi den matematiske model ved, at den idealiserede situation fra forrige fase oversættes til en matematisk repræsentation og matematiske værktøjer - fx i form af ligninger eller ligningssystemer, funktioner, grafer, uligheder, vektorer, differentialligninger og meget andet godt. Her oversættes beskrivelsen fra fase 1 til matematik. Her skal vi samtidig sørge for at definere alle de symboler, der benyttes, samt overveje, om der for eksempel gælder nogle begrænsninger (definitionsmængde, værdimængde). Når modellen er færdig, er situationen fra virkeligheden beskrevet med matematik, og problemstillingen er oversat til et matematisk spørgsmål.

3. fase: Matematisk problemløsning

Vi er nu i besiddelse af en model, som er formuleret i et matematisk sprog, og modellen kan analyseres ved hjælp af matematiske værktøjer. Formålet med den matematiske problembehandling af modellen er selvfølgelig at belyse det matematiske spørgsmål, der er fremsat i 2. fase, og matematikken anvendes således til tegning af grafer, bestemmelse af toppunkt, skæring mellem to linjer, løsning af differentialligninger, eller hvad der ellers måtte være relevant i den givne situation. Ved afslutningen af denne fase, står vi altså med et resultat - fx x=14.

4. fase: Af-matematisering

Den matematiske løsning "oversættes" igen til virkeligheden. Det betyder for eksempel, at alle løsninger skal resultere i et tekstsvar. Vi kan ikke konkludere: x= 14; men derimod "prisen bliver på 14 kr.", "der skal sælges 14 stole" eller "der går 14 dage, før antallet af bakterier er lig med...". På samme måde er løsningen ikke korrekt angivet, hvis vi skriver, at skæringspunktet er (3,12) - vi skal selvfølgelig skrive, hvad punktet viser. Husk altid enheder, hvor det måtte være relevant.

5. fase: Validering

Resultatet af af-matematiseringen skal som det sidste vurderes i forhold til det oprindelige problem. Gyldigheden af modellens resultater vurderes både internt inden for rammerne af modellen (dvs. er vores antagelser og simplificeringer acceptable) og eksternt i forhold til den eksisterende viden og observerede data (dvs. er resultatet plausibelt i forhold til virkeligheden). Såfremt resultatet ikke findes sandsynligt, revideres modellen, og modelleringsprocessen gennemløbes på ny. Således fortsættes, indtil et acceptabelt resultat er fremkommet ☺.

Afsluttende bemærkninger om matematisk modellering

Når matematisk modellering opleves som svært, skyldes det, at vi under præ- og matematiseringen skal opstille noget matematik, hvorom det gælder, at vi ikke nødvendigvis ved, om det er relevant for den givne situation, og måske ved vi heller ikke, hvordan i alverden vi skal problembehandle på dét, vi trods alt forhåbentligt får opstillet, og det er her, at det føromtalte paradoks ligger. Ens realitetskendskab spiller naturligvis også ind…

Bemærk afslutningsvist, at en model er en bevidst forenklet og formaliseret repræsentation af et udsnit af virkeligheden, og der derfor er **indbygget et element af fejl i enhver model**. Det er modellørens opgave at sikre, at denne fejl ikke bliver væsentlig, og derfor vil I selvfølgelig opleve, at jeres modeller, såfremt disse skal modellere samme udsnit af virkeligheden, ikke nødvendigvis giver det samme svar på den givne problemstilling.